12. *Yurov A. V.* BLP dissipative structures in plane // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 262. P. 445–452.

13. *Leble S. B., Yurov A. V.* Reduction Restrictions of Darboux and Laplace Transformations for the Goursat Equation // Journal of Mathematical Physics. 2002. Vol. 43, № 2. P. 1095–1105.

14. *Yurov V. A., Yurov A. V.* The Cauchy problem for the generalized hyperbolic Novikov-Veselov equation. arXiv:1509.06078 [nlin.SI].

Об авторах

Артем Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининградский государственный технический университет, Калининград.
E-mail: yurov@freemail.ru

About the authors

Prof. Artyom Yurov, I. Kant Baltic federal university, Kaliningrad.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Dr Alla Yurova, ass. prof., I. Kant Baltic federal university, State Tehnical University, Kaliningrad.
E-mail: yurov@freemail.ru

УДК 51:53

Р. В. Чириков, В. А. Юров

ИМПАКТОННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВИХРЕВОЙ НИТИ

Показан новый метод построения точных решений, описывающих форму вихревых нитей и основанный на применении бинарного преобразования Дарбу к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера. Построен новый тип решений — импактон — и вычислены кривизна и кручение соответствующей вихревой нити.

A new way of construction of exact solutions describing the shape and the dynamics of vortex filaments is described. The new method is based on application of a binary Darboux transformation to the solutions of the nonlinear Schrödinger equation. A new type of solutions is constructed: the impacton. The explicit form of the curvature and torsion of corresponding vortex filament are calculated.

Ключевые слова: вихревые нити, нелинейное уравнение Шрёдингера, преобразование Дарбу, импактон.

Key words: vortex filament, nonlinear Schrödinger equation, impacton.

Введение

Среди наиболее интересных и важных теоретических задач в гидродинамике можно выделить проблему аналитического исследования геометрии вихревого движения жидкости. При этом одним из ключевых объектов такого исследования по праву являются *вихревые нити*.

Напомним несколько основных понятий. *Вихревой линией* называют линию, касательная к которой в каждой точке сонаправлена с вихревым вектором $\omega = \nabla \times v$. Совокупность вихревых линий, проходящих через произвольную замкнутую кривую, образуют поверхность *вихревой трубки*. Наконец, вихревую трубку с инфинитезимальной площадью сечения называют *вихревой нитью* [1].

Вихревая нить представляет собой некоторую кривую $r(x, t)$, где r — векторная функция, t — время, а роль переменной x обычно играет параметр длины дуги кривой (так называемая *натуральная параметризация*). Если эта кривая обладает непрерывной второй частной производной по переменной x, то в каждой точке этой кривой можно определить следующую тройку единичных векторов:

1) касательный вектор $T = \dfrac{\partial r}{\partial x}$;

2) главную нормаль N (единичный вектор, сонаправленный со второй частной производной от r по x);

3) бинормаль кривой B, образующую с T и N правую тройку векторов. При этом векторы T, N и B удовлетворяют уравнениям Серре — Френе [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = kN, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\chi N, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \chi B - kT, \tag{1}$$

где функции $k = k(x, t)$ и $\chi = \chi(x, t)$ играют роли кривизны и кручения вихревой нити соответственно.

Удивительно, но система уравнений (1) для вихревой нити может быть сведена к одному уравнению: нелинейному уравнению Шрёдингера (НУШ):

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0, \tag{2}$$

где

$$u(x, t) = \frac{1}{2} k(x, t) \cdot \exp\left(i \int_0^x d\xi \, \chi(\xi, t) \right).$$

Предположим, что мы нашли решение уравнения (2) вида

$$u = u_r + i u_i.$$

Тогда кривизна и кручение соответствующей вихревой нити могут быть вычислены по следующим элементарным формулам:

$$k = 2|u| = 2\sqrt{u_r^2 + u_i^2}, \qquad \chi = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{u_i}{u_r} \right). \tag{3}$$

Таким образом, задача построения аналитического описания динамики вихревой нити полностью сводится к задаче построения точных решений НУШ (2).

Одним из наиболее интересных решений такого рода являются так называемые «волны-убийцы» (rogue waves): решения типа бризеров, локализованные одновременно по пространственной и временной переменным. В частности, решения такого рода оказываются ответственными за процесс формирования океанических линз [3].

С решениями типа «волн-убийц» связана также одна давняя загадка: дело в том, что стандартные методы «размножения» волн типа преобразования Дарбу [4] оказываются здесь неприменимыми и дают только тривиальные (нулевые) решения. Вплоть до недавнего времени этот факт рассматривался как особенность решений типа «волн-убийц» и как возможное указание на то, что «мультиволн убийц» просто не существует. Наконец, в 2010 году это было опровергнуто в работе [5], где были впервые построены решения типа Р-бризеров. Недостаток предложенного в [5] метода заключался в том, что для построения искомых решений авторам потребовалось перейти от НУШ к уравнению Кадомцева — Петвиашвили первого типа (КП-I). Однако в работе [6] нами был предложен более простой метод, не требующий нахождения затравочных решений других уравнений, кроме НУШ, и позволяющий не только строить все известные на настоящий момент Р-бризеры, но и совершенно новый класс решений, названных нами *импактонами* и описывающих процесс зарождения короткоживущей «волны-убийцы» вследствие столкновения двух симметричных регулярных бегущих волн типа позитонов.

Ключевой идеей предложенного в [6] метода является применение преобразования Дарбу, но не классического, а *бинарного*.

Преобразование Дарбу и импактон

В качестве первого шага запишем пару Лакса для НУШ (2):

$$\Psi_x = i\sigma_3\Psi\Lambda + iU\Psi,\ \Psi_t = 2i\sigma_3\Psi\Lambda^2 + 2iU\Psi\Lambda + W\Psi, \tag{4}$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u} \\ u & 0 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} -i|u|^2 & \bar{u}_x \\ -u_x & i|u|^2 \end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}.$$

Помимо (4) допустима и альтернативная пара Лакса (матрица M задается аналогично матрице Λ, но не обязательно совпадает с ней):

$$\Phi_x = iM\Phi\sigma_3 - i\Phi U,\ \Phi_t = -2iM^2\Phi\sigma_3 + 2iM\Phi U - \Phi W. \tag{5}$$

Примем для простоты

$$\Phi = \Psi^+,\quad M = -\Lambda^+$$

и введем замкнутую один-форму Ω такую, что

$$\Phi\Psi = i(M\Omega + \Omega\Lambda),\ \ \Omega_x = \Phi\sigma_x\Psi,$$

$$\Omega_t = 2i(\Phi_x\Psi - \Phi\Psi_x) - 2\Phi U\Psi = 2(\Phi\sigma_3\Psi\Lambda - M\Phi\sigma_3\Psi) + 2\Phi U\Psi\,.$$

Теперь предположим, что для некоторых Λ_1 и M_1 нам известны решения (4) и (5): Ψ_1 и Φ_1 соответственно. Введя вспомогательные функции

$$\tau = \Psi_1\Lambda_1\Psi_1^{-1},\ \ \sigma = \Phi_1^{-1}M_1\Phi_1,$$

мы получаем два преобразования Дарбу. Первое – из Ψ_1:

$$\begin{aligned}
&\Phi \to \Phi^{(+1)} = \Omega(\Phi,\Psi_1)\Psi_1^{-1}, \Phi_1 \to \Phi^{(+1)} = \Omega(\Phi_1,\Psi_1)\Psi_1^{-1},\\
&\Psi \to \Psi^{(+1)} = \Psi\Lambda - \tau\Psi, U \to U^{(+1)} = U + [\sigma_3,\tau] = U + 2\sigma_3\tau,\\
&W \to W^{(+1)} = W + 2i(U^{(+1)}\tau - \tau U) = \sigma_3(U_x^{(+1)} - i(U^{(+1)})^2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Второе – на базе Φ_1:

$$\begin{aligned}
&\Psi \to \Psi^{(-1)} = \Phi_1^{-1}\Omega(\Phi_1,\Psi),\\
&W \to W^{(+1)} = W + 2i(U^{(+1)}\tau - \tau U) = \sigma_3(U_x^{(+1)} - i(U^{(+1)})^2),\\
&\Psi_1 \to \Psi^{(-1)} = \Phi_1^{-1}\Omega(\Phi_1,\Psi_1), \Phi \to \Phi^{(-1)} = M\Phi - \Phi\sigma,\\
&U \to U^{(-1)} = U + [\sigma_3,\sigma].
\end{aligned} \tag{7}$$

Последовательно комбинируя (6) и (7), мы приходим к искомому *бинарному преобразованию Дарбу*

$$U^{(+1,-1)} = U^{(+1)} + \left[\sigma_3, \sigma^{(+1)}\right],$$

$$\sigma^{(+1)} = (\Phi_1^{(+1)})^{-1}M_1\Phi_1^{(+1)} = \Psi_1\Omega^{-1}(\Phi_1,\Psi_1)M_1\Omega(\Phi_1,\Psi_1)\Psi_1^{-1},$$

что может быть переписано в виде

$$U^{(+1,-1)} = U + \left[\sigma_3, \tau + \sigma^{(+1)}\right] = U - i\left[\sigma_3, G_{11}\right], \tag{8}$$

$$G_{11} = \Psi_1\Omega^{-1}(\Phi_1,\Psi_1)\Phi_1, \tag{9}$$

причем можно показать, что порядок взятия «положительных» и «отрицательных» преобразований Дарбу неважен.

Далее, вспомнив, что новая матрица $U^{(+1,-1)}$ должна оставаться эрмитовой, т. е. что

$$(U^{(+1,-1)})^{+} = U^{(+1,-1)},$$

наложим дополнительные условия редукции. Нетрудно показать, что эти условия должны иметь вид

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \bar\varphi_2 & -\bar\varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix},\ \ \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar\mu \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что нас интересует вид решения НУШ (8), построенного на базе *нулевого* затравочного решения $u=0$. Это означает, что

$$\varphi_1 = C_1 \exp(-i(ax+2(\alpha^2-\beta^2)t)+\beta\xi),$$
$$\varphi_2 = C_2 \exp(-i(ax+2(\alpha^2-\beta^2)t)-\beta\xi),$$

где $\mu=\alpha+i\beta$, $\bar{\mu}=\alpha-i\beta$, $\xi=x+4\alpha t$, $C_1, C_2 \in R$, а элементы вспомогательной матрицы Ω оказываются равными

$$\Omega_{12} = c-2x-8\bar{\mu}t = \bar{\Omega}_{21}, \;\; \Omega_{22} = -\Omega_{11} = \frac{1}{\beta}\cosh(2\beta\xi).$$

Используя теперь (8) и (9), после несложных вычислений мы приходим к окончательной формуле: импактону вида

$$u^{(+1,-1)} = \frac{4e^{-2i\theta}\left(8\beta t\cosh(2\beta\xi)+i\left(2\xi\sinh(2\beta\xi)-\dfrac{\cosh(2\beta\xi)}{\beta}\right)\right)}{\left(\dfrac{1}{\beta}\cosh(2\beta\xi)\right)^2+4(\xi^2+16\beta^2t^2)},$$
$$\theta = \alpha x+2(\alpha^2-\beta^2)t.$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (3) и вычислить соответствующие кривизну и кручение вихревой нити, полезно сначала вычислить модуль импактона:

$$\left|u^{(+1,-1)}\right|^2 = 16\frac{64\beta^2t^2\cosh^2(2\beta x)+\left(2x\sinh(2\beta x)-\dfrac{\cosh(2\beta x)}{\beta}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\beta}\cosh(2\beta x)\right)^2+4(x^2+16\beta^2t^2)}.$$

Тогда искомые значения кривизны k и кручения χ принимают окончательный вид

$$k = \frac{\sqrt{64\beta^2t^2\cosh^2(2\beta x)+\left(2x\sinh(2\beta x)-\dfrac{\cosh(2\beta x)}{\beta}\right)^2}}{\dfrac{4\cosh^2(2\beta x)}{\beta^2}+16(x^2+16\beta^2t^2)},$$
$$\chi = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{8\beta t}\left(2x\tanh(2\beta x)-\frac{t}{\beta}\right)\right].$$

Заключение

Нами был продемонстрирован новый способ построения точных решений, описывающих кривизну и кручение вихревой нити, основанный на сведении уравнений Френе — Серре к нелинейному уравнению Шрёдингера и использующий в качестве основного ингредиента бинарное преобразование Дарбу. Нами также было показано, что в случае решений типа «волны-убийцы» предложенный метод позволяет не ограничиваться первыми итерациями преобразования Дарбу и приводит к новым типам решений, названными нами импактонами.

В заключение отметим, что знание параметров k и χ может быть использовано для вычисления вида искомой кривой $r(x,t)$, поскольку уравнения Серре — Френе эквивалентны уравнению Риккати [7]:
$$\frac{\partial f}{\partial x}+ikf+\frac{1}{2}i\chi\left(1-f^2\right)=0, \text{ где } \frac{\partial r}{\partial x}=T=\frac{f+f^*}{1+|f|^2}.$$

Список литературы

1. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. Л., 1978.
2. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование. М., 2002.
3. *Yurova A.A.* A hidden life of Peregrine's soliton: rouge waves in the oceanic depths // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2014. Vol. 11. P. 1450057:1–15.
4. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin ; Heidelberg, 1991.
5. *Dubard P., Gaillard P., Klein C., Matveev V.* On multi-rogue wave solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation'// Eur. Phys. J. Spec. Top. 2010. Vol. 185. P. 247—258.
6. *Yurov A.V., Yurov V.A.* The Landau-Lifshitz equation, the NLS, and the magnetic rogue wave as a by-product of two colliding regular “positons”, Arxiv: 1701.04903.
7. *Lamb G.L.* Elements of soliton theory // John Wiley & Sons. 1980.

Об авторах

Роман Викторович Чириков — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: tdrifter@yandex.ru

Валериан Артемович Юров — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: vayt37@gmail.com

About the authors

Roman Chirikov, PhD student, I. Kant Baltic federal university, Kaliningrad.
E-mail: tdrifter@yandex.ru

Dr Valerian Yurov, leading researcher, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vayt37@gmail.com